

ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ И ФАЗОВО-МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

§ 7.1. Вводные замечания

В настоящее время наряду с амплитудной модуляцией получила распространение и частотная модуляция (ЧМ), позволяющая улучшить качество радиопередачи. При частотной модуляции в соответствии с передаваемым сообщением (например звуком) меняется частота колебания, амплитуда же его остается постоянной.

Для получения частотной модуляции можно параллельно колебательному контуру генератора высокой частоты (рис. 7.1) подключить конденсаторный микрофон. Этот микрофон состоит из тонкой мембраны M , отделенной узким воздушным промежутком от неподвижной пластины Π . Под действием звуковой волны мембрана микрофона колеблется и емкость между мембраной и неподвижной пластиной периодически изменяется. От этого изменяется в соответствии со звуковыми колебаниями общая емкость контура, а следовательно, и частота генерируемых колебаний.

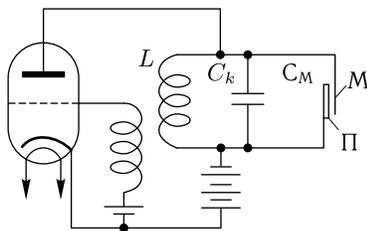


Рис. 7.1. Упрощенная схема генератора с частотной модуляцией

Кроме частотной модуляции, применяется также и фазовая модуляция, при которой сдвиг фаз колебания высокой частоты изменяется по закону изменения модулирующего колебания, амплитуда же колебания остается постоянной.

В следующих параграфах будет более подробно рассмотрена частотная и фазовая модуляция.

§ 7.2. Частота колебания

Рассмотрим колебание

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (7.1)$$

где ω_0 — постоянная величина.

Аргумент косинуса (7.1) называется фазой колебания, величина же $\varphi(t)$ представляет собой сдвиг фазы этого колебания по отношению к $\cos \omega_0 t$ (сокращенно — просто сдвиг фаз).

Как известно, частотой колебания называют количество полных периодов колебания за единицу времени.

Угловой частотой называют величину в 2π раз большую. Она равняется числу радиан, на которое изменится аргумент косинуса колебания, т. е. фаза за единицу времени. Таким образом, угловая частота равняется приращению фазы колебания $\Delta[\omega_0 t + \varphi(t)]$ за некоторое время Δt , поделенному на это время, т. е. величине

$$\omega = \frac{\Delta[\omega_0 t + \varphi(t)]}{\Delta t}.$$

Если фаза колебания изменяется неравномерно (то быстрее, то медленнее), то частота будет переменной. В этом случае для определения угловой частоты ω следует брать отрезок Δt достаточно малым, чтобы можно было считать на его протяжении изменение фазы равномерным. Еще более точный результат мы получим, если будем в выражении для ω стремиться Δt к нулю. Тогда получим для угловой частоты выражение

$$\omega = \frac{d[\omega_0 t + \varphi(t)]}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (7.2)$$

Таким образом, угловая частота колебания равна производной его фазы по времени. Если в колебании (7.1) сдвиг фаз $\varphi(t)$ величина постоянная, то согласно выражению (7.2) угловая частота этого колебания будет равна ω_0 .

Частота колебания будет в 2π раз меньше, поскольку колебание совершает полный цикл при изменении фазы, т. е. аргумента, на 2π .

Частота колебания (7.1) равна

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (7.3)$$

где

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

На рис. 7.2а пунктиром показано колебание $U_m \cos \omega_0 t$ и сплошной линией колебание (7.1), на рис. 7.2б — сдвиг фаз между этими

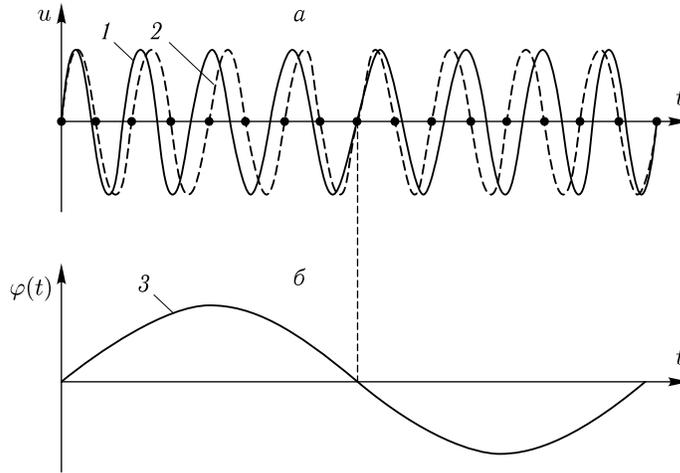


Рис. 7.2. *a*: 1 — синусоидальное колебание с переменной частотой, 2 — синусоидальное колебание с постоянной частотой, *б* — сдвиг фаз колебания 1

колебаниями $\varphi(t)$. Как видно из этого рисунка, на тех участках, где $\varphi(t)$ растет, период колебания (7.1) уменьшается, и частота его возрастает. На тех участках, где $\varphi(t)$ уменьшается, частота колебания также уменьшается. Это согласуется с ф-лой (7.3).

Если задана угловая частота колебания ω , то в общем случае колебание может быть записано так:

$$u = U_m \cos \int \omega dt. \quad (7.4)$$

В правильности этого выражения легко убедиться, определив угловую частоту этого колебания путем дифференцирования его фазы, т. е. $\int \omega dt$ по времени.

Из сказанного можно сделать вывод, что если сдвиг фаз колебания меняется, то будет меняться его частота и, наоборот, если частота колебания переменна, то сдвиг фаз будет также меняться.

Пример 7.1. Дано колебание $u = U_m \cos[(at + b)t + c]$.

Требуется найти его угловую частоту.

Решение. Угловая частота этого колебания согласно ф-ле (7.2) будет равна

$$\omega = \frac{d[(at + b)t + c]}{dt} = at + at + b = 2at + b.$$

Пример 7.2. Частота синусоидального колебания равна $f = 1\,000\,000 + 10\,00 \cos 2\pi 1000t$ Гц, амплитуда 100 В.

Требуется записать аналитическое выражение этого колебания.

Решение. Угловая частота колебания будет равна

$$\omega = 2\pi 10^6 + 2\pi 10^4 \cos 2\pi 10^3 t,$$

откуда колебание согласно ф-ле (7.4) запишется так:

$$u = U_m \cos \int \omega dt = 100 \cos \left(2\pi 10^6 t + \frac{2\pi \cdot 10^4}{2\pi \cdot 10^3} \sin 2\pi 10^3 t + \varphi_0 \right) = \\ = 100 \cos(2\pi 10^6 t + 10 \sin 2\pi 10^3 t + \varphi_0),$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

§ 7.3. Частотно-модулированные колебания

Колебание называют частотно-модулированным (ЧМ), если частота его изменяется пропорционально передаваемому колебанию (например звуковому) $S(t)$. Следовательно, угловая частота такого колебания должна равняться

$$\omega = \omega(t) = \omega_0 + aS(t),$$

где ω_0 и a — некоторые постоянные, которые выбираются так, чтобы частота ω изменялась в желаемых пределах.

Аналитическое выражение для ЧМ колебания в соответствии с ф-лой (7.4) будет иметь следующий вид:

$$u = U_m \cos \int [\omega_0 + aS(t)] dt = U_m \cos[\omega_0 t + a \int S(t) dt + \varphi_0], \quad (7.5)$$

где φ_0 — произвольная постоянная.

Сравнивая выражения (7.1) и (7.5), мы видим, что сдвиг фаз данного колебания будет равен

$$\varphi(t) = a \int S(t) dt + \varphi_0. \quad (7.6)$$

ЧМ колебание характеризуется частотным отклонением и индексом модуляции.

Если обозначить через f_{\max} максимальную частоту, а через f_{\min} ее минимальное значение, то средняя частота будет равна

$$f_c = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}.$$

Частотным отклонением¹⁾ называют максимальное отклонение частоты от ее среднего значения. Таким образом частотное отклонение будет равно

$$\Delta f = f_{\max} - f_c = f_c - f_{\min} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2}. \quad (7.7)$$

Аналогичные определения употребляют и для угловых частот.

¹⁾ Иногда в литературе вместо «частотного отклонения» употребляют термин «девиация частоты».

Обозначим через φ_{\max} максимальный и через φ_{\min} минимальный сдвиг фаз некоторого колебания. В этом случае средний сдвиг фаз будет равен

$$\varphi_c = \frac{\varphi_{\max} + \varphi_{\min}}{2}.$$

Индексом модуляции называют максимальное отклонение сдвига фаз колебания от его среднего значения φ_c .

Таким образом, индекс модуляции будет равен

$$m = \varphi_{\max} - \varphi_c = \varphi_c - \varphi_{\min} = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2}. \quad (7.8)$$

Пример 7.3. Найти частотное отклонение и индекс модуляции колебания в примере 7.2.

Решение. Согласно ф-ле (7.7) частотное отклонение будет равно:

$$\Delta f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{1\,010\,000 - 990\,000}{2} = 10\,000 \text{ Гц.}$$

Индекс модуляции согласно ф-ле (7.8) будет равен

$$m = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2} = \frac{(10 + \varphi_0) - (-10 + \varphi_0)}{2} = 10.$$

Рассмотрим ЧМ передачу простого синусоидального колебания с частотой Ω_1 и сдвигом фаз Φ_1 . При передаче такого колебания угловая частота ЧМ колебания должна меняться по следующему закону:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_1 \cos(\Omega_1 t + \Phi_1). \quad (7.9)$$

Величина $\Delta\omega_1$ согласно определению есть частотное отклонение. Это частотное отклонение тем больше, чем больше амплитуда передаваемого колебания.

Само частотно-модулированное (ЧМ) колебание на основании выражения (7.4) запишется следующим образом:

$$u = U_m \cos \left[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0 \right]. \quad (7.10)$$

Индекс модуляции этого колебания равен

$$m_1 = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1}.$$

На рис. 7.2а (сплошная линия) приведена временная диаграмма такого колебания.

Если $S(t)$ — сумма простых синусоидальных колебаний, то изменение частоты будет происходить по закону:

$$\omega = \omega_0 + \sum_{\kappa=1}^n \Delta\omega_{\kappa} \cos(\Omega_{\kappa} t + \Phi_{\kappa}). \quad (7.11)$$

Величины $\Delta\omega_\kappa$ мы назовем парциальными частотными отклонениями на частотах Ω_κ .

Само колебание будет записано так:

$$u = U_m \cos \left[\omega_0 t + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\Delta\omega_\kappa}{\Omega_\kappa} \sin(\Omega_\kappa t + \Phi_\kappa) + \varphi_0 \right]. \quad (7.12)$$

Величины $\frac{\Delta\omega_\kappa}{\Omega_\kappa}$ мы назовем парциальными индексами модуляции.

§ 7.4. Фазово-модулированные колебания

Фазово-модулированным (ФМ) колебанием называют колебание, сдвиг фаз которого изменяется пропорционально передаваемому колебанию $S(t)$. В выражении (7.1) мы должны, следовательно, положить

$$\varphi(t) = \varphi_0 + aS(t), \quad (7.13)$$

где φ_0 и a — постоянные величины.

Аналитическое выражение ФМ колебания будет иметь следующий вид:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + aS(t) + \varphi_0]. \quad (7.14)$$

ФМ колебания так же, как и колебания, модулированные по частоте, характеризуются частотным отклонением и индексом модуляции, которые определяются так же, как и при ЧМ.

Если $S(t)$ простое синусоидальное колебание с частотой Ω_1 и начальной фазой Φ_1 , то выражение (7.14) переписывается так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0]. \quad (7.15)$$

Частота этого колебания будет равна

$$\omega = \omega_0 - m_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1). \quad (7.16)$$

При фазовой модуляции индекс модуляции m_1 пропорционален только амплитуде передаваемого сигнала. Частотное отклонение при фазовой модуляции, как это видно из (7.7), равно

$$\Delta\omega_1 = m_1 \Omega_1. \quad (7.17)$$

Если $S(t)$ — сумма простых синусоидальных колебаний, то вместо выражения (7.15) мы должны записать следующее:

$$u = U_m \cos \left[\omega_0 t + \sum_{\kappa=1}^n m_\kappa \sin(\Omega_\kappa t + \Phi_\kappa) + \varphi_0 \right]. \quad (7.18)$$

Как при частотной, так и при фазовой модуляции амплитуда остается постоянной, изменяются же частота и сдвиг фаз. Разница между

ними заключается в том, что в одном случае пропорционально передаваемому колебанию $S(t)$ изменяется частота, а в другом — сдвиг фаз.

Вследствие этого при ЧМ частотное отклонение изменяется пропорционально амплитуде передаваемого колебания (например звука), а индекс модуляции изменяется пропорционально амплитуде и обратно пропорционально частоте передаваемого сигнала.

При ФМ частотное отклонение пропорционально амплитуде и частоте передаваемого колебания, а индекс модуляции зависит только от его амплитуды.

Встречаются случаи, когда одновременно с изменением частоты изменяется и амплитуда колебания. Такая модуляция называется смешанной. Смешанная модуляция тока, например, получалась у нас при воздействии амплитудно-модулированного напряжения на комплексное сопротивление, величина которого различна для верхних и нижних боковых частот (см. § 6.8).

Пример 7.4. Передается звуковое колебание

$$u = 10 \cos 100t + 2 \cos(3000t + 0,5).$$

Требуется записать ЧМ и ФМ колебания при такой передаче, если их средняя частота должна быть равна 100 МГц.

Решение. 1. При ФМ искомое колебание будет определяться ф-лой

$$u = U_m \cos\{2\pi 10^8 t + a[10 \cos 1000t + 2 \cos(3000t + 0,5)]\},$$

где a — некоторый коэффициент пропорциональности.

2. При ЧМ искомое колебание будет определяться по ф-ле (7.5)

$$u = U_m \cos\{2\pi 10^8 t + b[10 \cdot 10^{-3} \sin 1000t + \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \sin(2000t + 0,5) + \varphi_0]\},$$

где b и φ_0 — некоторые постоянные.

§ 7.5. Векторные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний

Рассмотрим векторную диаграмму колебания, модулированного по частоте или по фазе. Аналитически такое колебание может быть записано так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (7.19)$$

Это колебание можно представить с помощью вектора, который, вращаясь, должен давать проекцию на ось проекций, равную u . Для этого вектор, изображающий колебание (7.6), должен иметь длину, равную U_m , и составлять с осью проекций угол $\omega_0 t + \varphi(t)$ (рис. 7.3). Если ось проекций вращать по часовой стрелке так, чтобы она составляла с горизонтальной осью угол $\omega_0 t$, то вектор, изображающий колебание, должен составлять с горизонтальной осью угол $\varphi(t)$. Так как при ЧМ и ФМ сдвиг $\varphi(t)$ меняется, а амплитуда колебаний остается постоянной, то на векторной диаграмме вектор такого колебания будет иметь постоянную длину и переменное направление. Как следует из определения индекса модуляции (см. § 7.3), вектор, изображающий

ЧМ и ФМ колебание, будет качаться, отклоняясь от среднего значения вправо и влево на угол, равный индексу модуляции m (рис. 7.4).

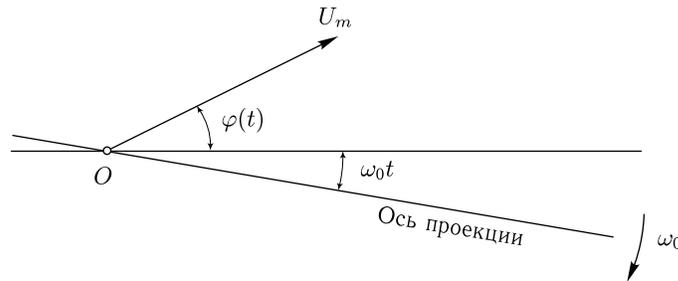


Рис. 7.3. Векторная диаграмма ЧМ и ФМ колебания

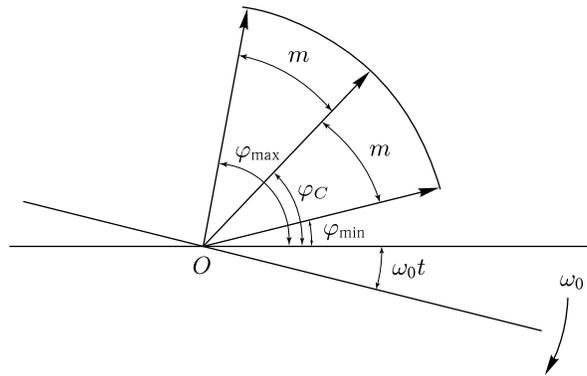


Рис. 7.4. Векторная диаграмма ЧМ и ФМ колебания. m — индекс модуляции

§ 7.6. Преимущества частотной и фазовой модуляции перед амплитудной

Основное преимущество колебаний, модулированных по частоте или по фазе, по сравнению с амплитудно-модулированными колебаниями, заключается в том, что они меньше подвержены влиянию помех при радиоприеме. Покажем это для простейшего случая.

Пусть на некоторое синусоидальное колебание, передаваемое радиостанцией,

$$u_c = U_c \cos(\omega_0 t + \varphi_c)$$

накладывается другое постороннее колебание

$$u_n = U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n),$$

причем $U_n \ll U_c$.

Векторная диаграмма этих колебаний и их суммы показана на рис. 7.5. На этом рисунке \overline{OA} — вектор колебания u_c , \overline{AB} — вектор колебания u_n и \overline{OB} — вектор их суммарного колебания.

Поскольку было принято, что ось проекций вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_0 , вектор \overline{OA} будет неподвижным, а вектор \overline{AB} — вращающимся с угловой скоростью $\omega_n - \omega_0$.

Как видно из этой векторной диаграммы, суммарное колебание будет модулировано по амплитуде, причем коэффициент модуляции будет равен

$$M_n = \frac{U_n}{U_c}.$$

Кроме того, будет происходить модуляция по частоте и фазе с индексом модуляции m_n , который может быть найден следующим образом:

$$\sin m_n = \frac{U_n}{U_c} \approx m_n.$$

Угловая частота модуляции будет равна $\omega_n - \omega_0$.

Если суммарное колебание $u_c + u_n$ будет воздействовать на приемник, предназначенный для телефонного приема АМ колебаний, то он при этом будет воспроизводить звук с частотой $\omega_n - \omega_0$ и с амплитудой, пропорциональной коэффициенту модуляции, т. е. M_n . Если колебание $u_c + u_n$ будет воздействовать на телефонный приемник, предназначенный для приема ЧМ или ФМ колебаний, то он будет воспроизводить звук с той же частотой, а амплитуда этого звука будет пропорциональна индексу модуляции, т. е. величине m_n .

Радиоприемники для приема ЧМ и ФМ колебаний делаются так, что они реагируют на изменение частоты или сдвига фаз входящих колебаний и не реагируют на изменение их амплитуды.

Таким образом, постороннее колебание u_n , наложившись на колебание сигнала u_c принимаемой радиостанции, создаст дополнительный не передававшийся звук, мешающий нормальному приему, т. е. окажет мешающее действие. Для того, чтобы оценить это мешающее действие предположим, что приемник, предназначенный для приема АМ колебаний при максимальной громкости передаваемого звука (когда коэффициент модуляции принимаемого колебания равен единице), создает звуковое колебание с амплитудой A . Тогда под действием колебания помехи u_n он создаст звук во столько раз меньший, во сколько раз M_n меньше 1, т. е. звук с амплитудой

$$AM_n = A \frac{u_n}{u_c}. \quad (7.20)$$

Пусть приемник для приема ЧМ или ФМ колебаний при максимальной громкости нормально передаваемого звука создает ту же

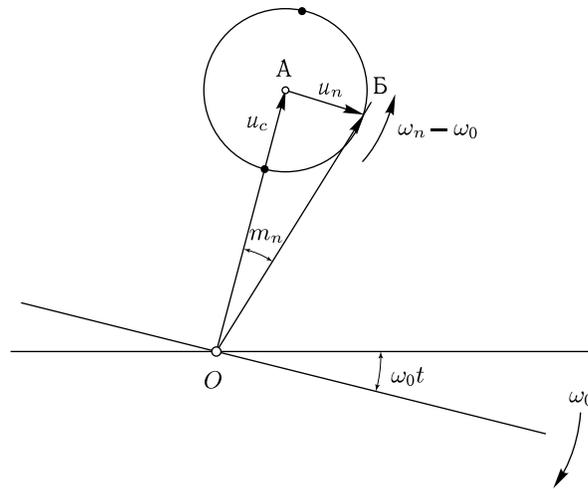


Рис. 7.5. Сложение колебания сигнала и помехи. OA — вектор колебания сигнала, AB — вектор колебания помехи, OB — вектор суммарного колебания

амплитуду звукового колебания A , причем максимальному звуку соответствует индекс модуляции, равный m_m . Тогда под действием помехи u_n приемник воспроизведет звук с амплитудой во столько раз меньшей A , во сколько раз m_n меньше m_m т. е. звук с амплитудой

$$A \frac{m_n}{m_m} = A \frac{u_n}{u_c} \cdot \frac{1}{m_m}. \quad (7.21)$$

Сравнивая выражение (7.20) с выражением (7.21), мы видим, что при одинаковых прочих условиях приемник для приема ЧМ или ФМ будет воспроизводить звук от помехи в m_m раз слабее, чем при амплитудной модуляции. Поэтому, чем больше m_m , тем слабее будет звук от помехи и тем больше будет преимущество ЧМ и ФМ (при помехе рассмотренного типа) по сравнению с амплитудной модуляцией.

Мы рассмотрели простейший вид помехи в виде синусоидального колебания. При более сложных помехах ЧМ и ФМ имеет также преимущество перед амплитудной модуляцией. Однако и ЧМ и ФМ имеют недостатки, благодаря которым их применение не всегда оказывается целесообразным.

Об основном недостатке модуляций этого вида мы будем говорить в следующем параграфе.

§ 7.7. Разложение ЧМ и ФМ колебаний на колебания несущей и боковых частот

Для нахождения тока под действием амплитудно-модулированного напряжения мы разлагали последнее на простые синусоидальные колебания, амплитуды и частоты которых постоянны (см. § 6.4).

Прделаем то же для ЧМ и ФМ колебаний. Эти колебания могут быть представлены так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (7.22)$$

Разлагая это выражение по формуле косинуса суммы, мы получим

$$u = U_m \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - U_m \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t. \quad (7.23)$$

Таким образом, колебание u может быть всегда разложено на два АМ высокочастотных колебания с амплитудами

$$U_m \cos \varphi(t) \quad \text{и} \quad U_m \sin \varphi(t).$$

При медленном изменении $\varphi(t)$ эти амплитуды изменяются сравнительно медленно.

Полученные АМ колебания могут быть разложены в свою очередь на колебания несущих и боковых частот методом, уже известным нам по гл. 6. Для этого требуется $U_m \cos \varphi(t)$ и $U_m \sin \varphi(t)$ представить в виде сумм синусоидальных колебаний. Однако в общем случае последнее представляет большие математические трудности. Поэтому мы произведем такое разложение для наиболее простого случая, когда передаваемое колебание, например звук, синусоидально.

В этом случае ЧМ и ФМ колебание может быть записано так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0]. \quad (7.24)$$

Разница между ЧМ и ФМ будет лишь в величине m_1 и сдвиге фаз Φ_1 . Разложим выражение (7.24) также по формуле косинуса суммы. Беря за первое слагаемое аргумента величину $m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)$ и за второе величину $\omega_0 t + \varphi_0$, получим

$$u = U_m \cos[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - U_m \sin[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.25)$$

Амплитуда каждого из полученных колебаний изменяется периодически и поэтому может быть представлена с помощью ряда Фурье в виде суммы простых синусоидальных колебаний. После этого будет нетрудно разложить каждое АМ колебание на несущую и боковые частоты. Однако разложение этих колебаний в ряд Фурье представляет известную математическую трудность, так как встречающиеся интегралы не берутся элементарно и приводятся к функциям Бесселя. Поэтому сначала мы рассмотрим самый простой случай, положив $m_1 \ll 1$.

При этом можно считать, что

$$\begin{aligned}\cos[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] &\approx 1, \\ \sin[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] &\approx m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)\end{aligned}$$

и выражение (7.25) записать так:

$$\begin{aligned}u &= U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0] \approx \\ &\approx U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - U_m m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{M_1 U_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_1)t + \varphi_0 + \Phi_1] - \\ &- \frac{m_1 U_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_1)t + \varphi_0 - \Phi_1].\end{aligned}\quad (7.26)$$

Отсюда видно, что ЧМ и ФМ колебание с индексом модуляции $m_1 \ll 1$ может быть представлено так же, как и колебание, синусоидально модулированное по амплитуде, в виде суммы колебаний несущей и двух боковых частот, причем отличие этого разложения от разложения АМ колебания состоит в том, что перед колебанием нижней боковой частоты стоит знак «минус», а не «плюс». Если индекс модуляции мал ($m_1 \ll 1$), то на векторной диаграмме можно проследить образование ЧМ и ФМ колебания из колебаний несущей и боковых частот. На рис. 7.6 вектор \overline{OA} изображает колебание несущей частоты. Он имеет постоянную длину U_m и составляет с горизонтальной осью постоянный угол φ_0 , поскольку ось проекций вращается с угловой скоростью ω_0 . Вектор верхней боковой частоты \overline{AB} будет вращаться против часовой стрелки с угловой частотой Ω_1 , составляя с вектором несущей в момент времени $t = 0$ угол Φ_1 . Вектор нижней боковой частоты \overline{AC} будет вращаться по часовой стрелке и будет составлять с вектором несущей при $t = 0$ угол $-\Phi_1 + \pi$, поскольку в выражении (7.26) колебание, соответствующее этому вектору, имеет знак «минус». Как видно из рис. 7.6, равнодействующая векторов боковых частот будет всегда перпендикулярна вектору несущей (в отличие от амплитудной модуляции, где она совпадала с вектором несущей) и будет менять свою длину. Равнодействующий вектор \overline{OD} будет своим концом перемещаться по линии \overline{DE} , меняя свой угол, как это и должно быть у ЧМ и ФМ колебания.

Как видно из рис. 7.6 длина результирующего вектора будет несколько меняться. Это не соответствует действительности и является результатом неточности произведенного выше приближенного разложения ЧМ колебания.

При использовании точного разложения колебания длина результирующего вектора на векторной диаграмме будет неизменна. Чем меньше m_1 , тем точнее приближенное выражение, а следовательно, и построенная на основании его векторная диаграмма.

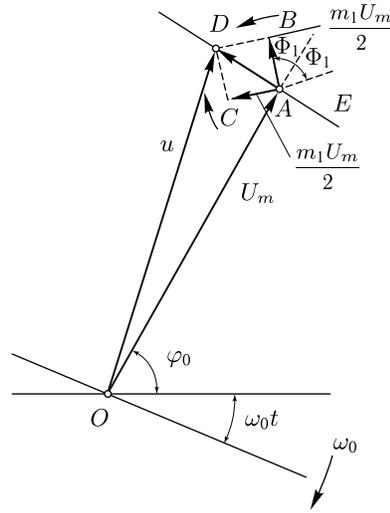


Рис. 7.6. Векторная диаграмма колебаний несущей и боковых частот при ЧМ и ФМ для случая $m \ll 1$. \overline{OA} — вектор колебания несущей частоты, \overline{AB} и \overline{AC} — векторы колебаний боковых частот. \overline{AD} — результирующий вектор

Для точного разложения ЧМ и ФМ колебания на сумму простых синусоидальных колебаний при любом значении индекса модуляции m_1 воспользуемся формулой

$$e^{im_1 \sin x_1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) e^{inx_1} \quad (1)$$

где $J_n(m_1)$ — функция Бесселя n -го порядка от m_1 . Обозначив $\Omega_1 t + \Phi_1 = x_1$, перепишем выражение (7.24):

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin x_1 + \varphi_0) = U_m \operatorname{Re}[e^{i(\omega_0 t + m_1 \sin x_1 + \varphi_0)}] = \\ &= U_m \operatorname{Re}[e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} e^{im_1 \sin x_1}] = U_m \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) e^{inx_1} \right] = \\ &= U_m \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) e^{i(\omega_0 t + nx_1 + \varphi_0)} \right] = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[J_n(m_1) e^{i(\omega_0 t + nx_1 + \varphi_0)}] = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) \cos(\omega_0 t + nx_1 + \varphi_0). \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, Кузьмин Р. О. «Бесселевы функции», ОНТИ, 1935 г., стр. 120.

Подставляя вместо x_1 его значение, получим:

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0] = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) \cos[(\omega_0 + n\Omega_1)t + n\Phi_1 + \varphi_0]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

На рис. 7.7 и 7.8 приведена зависимость $J_n(m)$ для некоторых n ¹⁾.

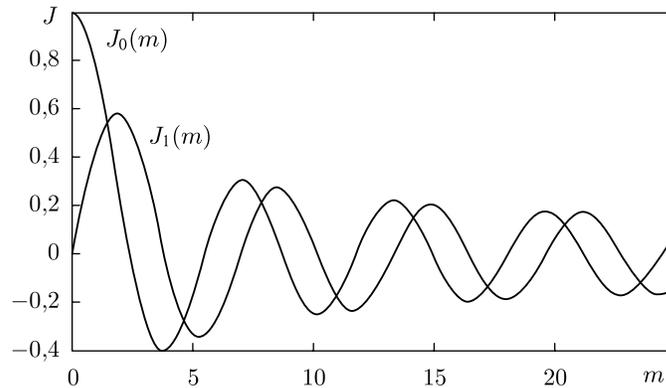


Рис. 7.7. Бесселевы функции: нулевого порядка — $J_0(m)$ и первого порядка — $J_1(m)$

Из теории функций Бесселя известно, что при $n > (m_1 + 1)$ значения функций Бесселя $J_n(m_1)$ очень быстро убывают с ростом n .

Кроме того, известно, что

$$\begin{aligned} J_{-n}(m_1) &= J_n(m_1) \quad \text{при четном } n, \\ J_{-n}(m_1) &= -J_n(m_1) \quad \text{при нечетном } n. \end{aligned}$$

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1) ЧМ и ФМ колебания в случае модуляции одной частотой Ω_1 могут быть представлены в виде суммы колебаний несущей частоты ω_0 и боковых частот $\omega_0 \pm n\Omega_1$, расположенных симметрично относительно несущей частоты. Соседние боковые частоты отличаются друг от друга на величину Ω_1 .

2) Амплитуда каждой из составляющих равна $U_m J_n(m_1)$; при четном n колебания верхних и нижних боковых частот имеют один и тот же знак, при нечетном n — разные.

3) Теоретически количество колебаний боковых частот бесконечно велико, однако, поскольку, начиная с $n = m_1 + 1$ амплитуды боковых

¹⁾ Подробные таблицы функций Бесселя приведены в книге В. Н. Фадеевой и М. К. Габурина «Таблицы функций Бесселя целых номеров», Гостехиздат, 1950 г.

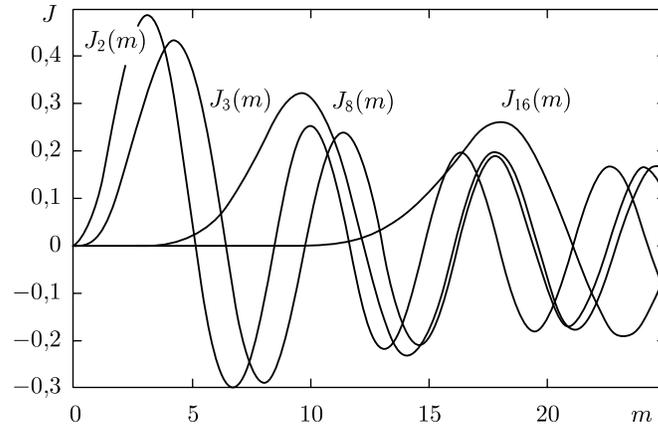


Рис. 7.8. Бесселевы функции: второго порядка — $J_2(m)$, третьего порядка — $J_3(m)$, восьмого порядка — $J_8(m)$, шестнадцатого порядка — $J_{16}(m)$

частот с ростом n резко убывают, на практике можно считать, что число боковых частот равно $2(m_1 + 1)$ (учитывая боковые частоты, расположенные по обе стороны от несущей). Таким образом, полоса частот, занимаемая радиостанцией с частотной или фазовой модуляцией, практически равна

$$\boxed{2\Omega_1(m_1 + 1) = 2(\Delta\omega_1 + \Omega_1)}. \quad (7.28)$$

Отсюда следует, что при ЧМ и ФМ несущие частоты радиостанций во избежание взаимных помех должны отличаться друг от друга на величину большую, чем $2\Omega_1(m_1 + 1)$.

При АМ во избежание помех расстояние между несущими частотами станций должно было быть больше $2\Omega_1$.

Таким образом (при $m_1 > 1$)¹⁾, число ЧМ и ФМ станций в том же диапазоне будет меньше, чем число АМ станций. Эта особенность ЧМ и ФМ является основным их недостатком, по причине которого данные виды модуляции (для телефонной передачи) применяются в основном лишь на ультракоротких волнах, где частотный спектр еще не насыщен станциями.

Колебание, модулированное по частоте или фазе одновременно двумя частотами Ω_1 и Ω_2 , может быть записано так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + m_2 \sin(\Omega_2 t + \Phi_2) + \varphi_0]. \quad (7.29)$$

Такое колебание также может быть разложено на составляющие несущей и боковых частот. Можно показать аналогично предыдущему

¹⁾ m_1 обычно делают больше 1, чтобы получить преимущество в защите помех по отношению к АМ.

(из-за громоздкости мы вывода приводить не будем), что в разложении будут составляющие со следующими частотами и амплитудами:

- 1) несущая частота ω_0 с амплитудой $U_m J_0(m_1) J_0(m_2)$;
- 2) боковые частоты $\omega_0 \pm n\Omega_1$ с амплитудами $U_m J_0(m_2) J_n(m_1)$;
- 3) боковые частоты $\omega_0 \pm n\Omega_2$ с амплитудами $U_m J_0(m_1) J_n(m_2)$;
- 4) боковые частоты $\omega_0 \pm p\Omega_1 \pm q\Omega_2$ с амплитудами

$$U_m J_p(m_1) J_q(m_2),$$

где p и q — любые целые числа.

Ширина полосы частот, занимаемая этим колебанием, может быть принята равной $2(\Delta\omega + \Omega_2)$, где $\Delta\omega$ — частотное отклонение, Ω_2 — наибольшая из модулирующих частот.

При $(m_1 + m_2) \ll 1$ колебание (7.29) может быть легко разложено на колебания несущей и боковых частот приближенным методом, аналогичным применявшемуся нами в случае $m_1 \ll 1$ при модуляции одной частотой.

§ 7.8. Спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний

ЧМ и ФМ колебания так же, как и АМ колебание (см. § 6.5), могут быть изображены с помощью спектральной диаграммы.

На рис. 7.9 изображена спектральная диаграмма колебания, индекс модуляции которого $m_1 = 0,2$. Диаграмма построена согласно разложению (7.26). Нижняя боковая частота изображена отрезком, отложенным вниз. Это обозначает, что перед колебанием с этой частотой стоит знак минус.

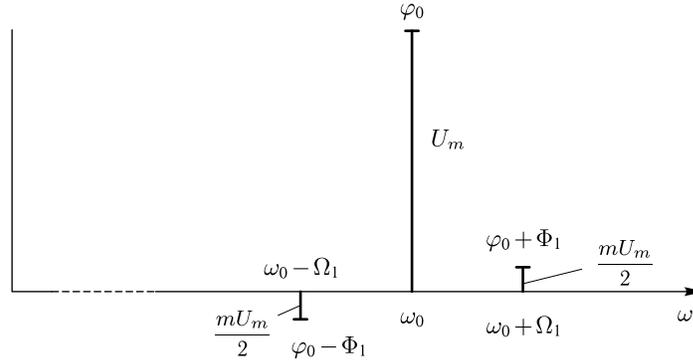


Рис. 7.9. Спектральная диаграмма ЧМ и ФМ колебаний при $m \ll 1$

На рис. 7.9 так же, как из выражения (7.26), видно, что полоса частот такого колебания равна $2\Omega_1$ т. е. та же, что и при амплитудной модуляции.

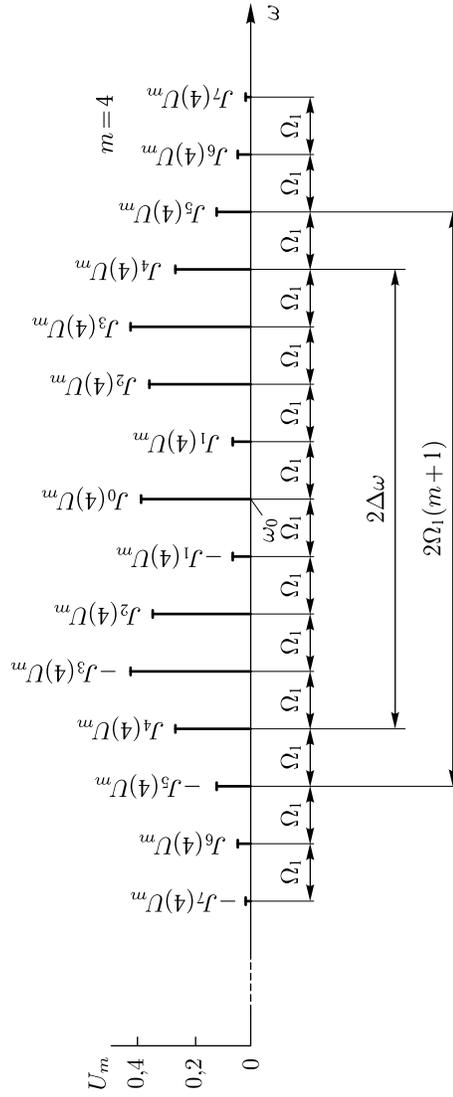


Рис. 7.10. Спектральная диаграмма ЧМ и ФМ колебаний при $m = 4$

На рис. 7.10 изображена спектральная диаграмма колебания, индекс модуляции которого $m_1 = 4$. Эта спектральная диаграмма построена на основании точного разложения (7.27). Полоса частот такого колебания примерно равна $2\Omega_1(m_1 + 1) = 10\Omega_1$. Для упрощения чертежа все амплитуды на этом и последующих рисунках изображены положительными.

Посмотрим, как будут изменяться спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний с изменением амплитуды и частоты модулирующего сигнала.

На рис. 7.11 приведены спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний для случая, когда частота модулирующего колебания неизменна и меняется лишь его амплитуда.

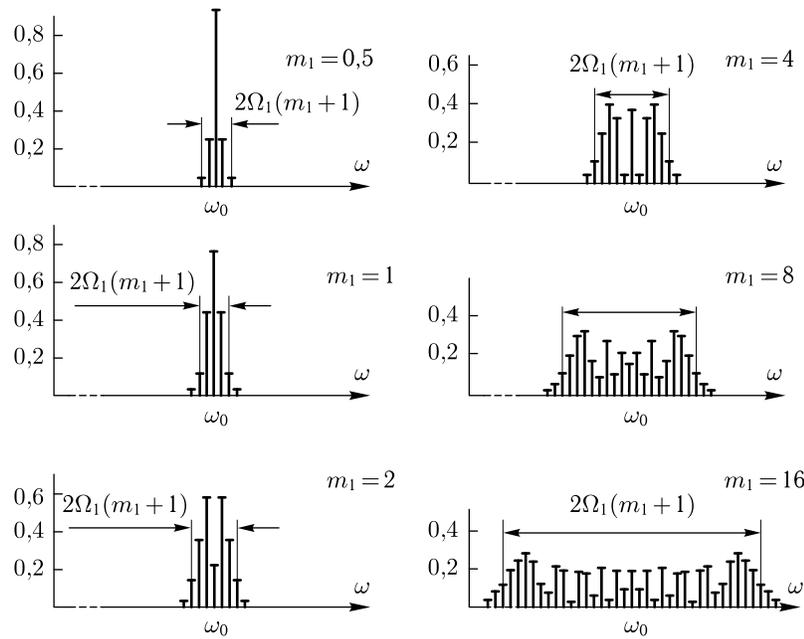


Рис. 7.11. Спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний при разных m

Из рис. 7.11 видно, что с увеличением амплитуды модулирующего колебания полоса частот ЧМ и ФМ колебания расширяется (верхняя диаграмма соответствует минимальной амплитуде, нижняя — максимальной). На этой диаграмме стрелками показана величина $2\Omega_1(m_1 + 1)$, принятая нами за полосу частот, занимаемую ФМ и ЧМ колебанием.

Рисунок 7.12 показывает, как изменяются спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний, если амплитуда модулирующего колебания остается постоянной, а меняется модулирующая частота. При частотной

модуляции неизменной амплитуде соответствует неизменное частотное отклонение $\Delta\omega$, при фазовой модуляции — неизменный индекс модуляции m_1 .

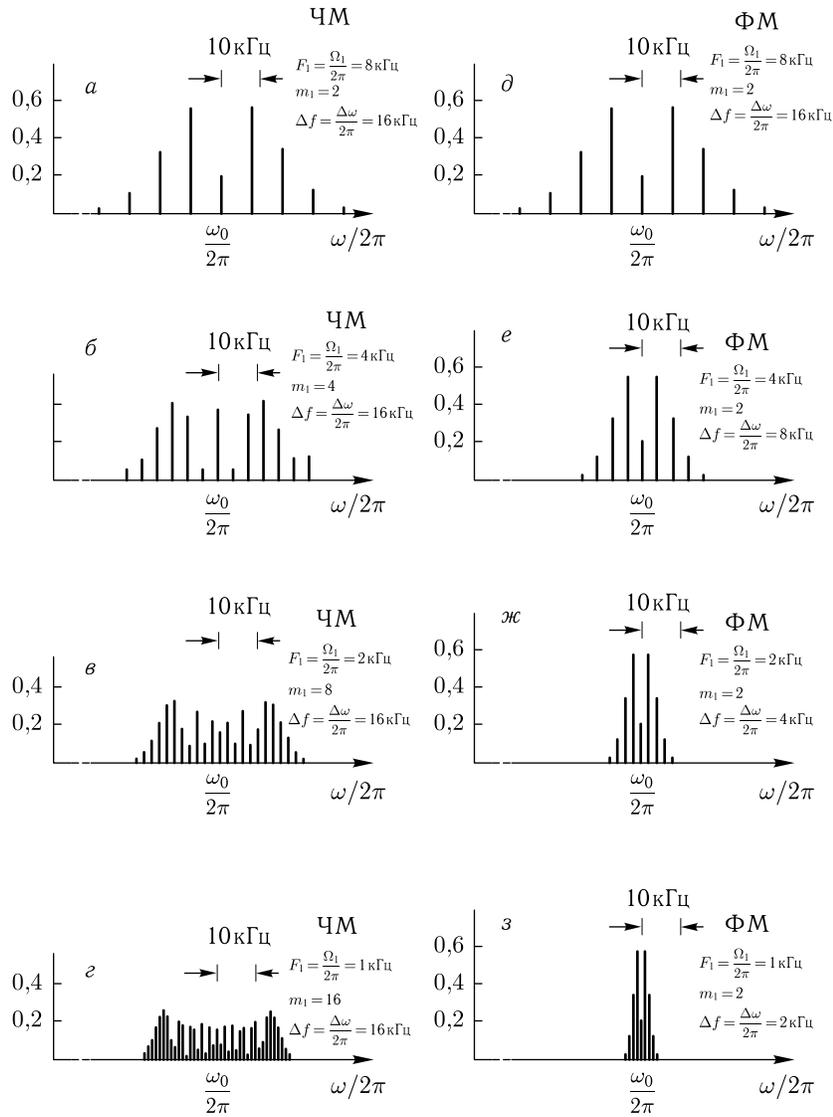


Рис. 7.12. *a*, *б*, *в*, *г* — спектральные диаграммы ЧМ колебания при изменении Ω_1 ; *д*, *е*, *ж*, *з* — спектральные диаграммы ФМ колебания при изменении Ω_1

Таким образом, с уменьшением модулирующей частоты в случае частотной модуляции (левый столбец диаграмм) увеличивается количество составляющих боковых частот, но полоса частот колебания остается примерно постоянной.

В случае фазовой модуляции (правый столбец диаграмм) с уменьшением модулирующей частоты уменьшается полоса частот, количество же составляющих боковых частот остается неизменным.

Как видно из этого рисунка, при малых частотах модуляции (например при $F_1 = 1$ кГц) индекс модуляции для ЧМ получается больше, чем для ФМ (при ЧМ $m_1 = 16$, при ФМ $m_1 = 2$).

§ 7.9. Воздействие ЧМ и ФМ напряжения на цепи с комплексной проводимостью

Для нахождения тока, который будет течь через цепь с комплексной проводимостью под действием ЧМ или ФМ напряжения, можно поступить так же, как мы поступали в случае амплитудной модуляции: 1) разложить напряжение на составляющие несущей и боковых частот, амплитуды и частоты которых постоянны; 2) найти токи от каждой составляющей напряжения обычным комплексным методом; 3) сложить полученные токи. Суммарный ток будет равен искомому.

Однако этот метод из-за большого количества боковых частот при ЧМ или ФМ часто оказывается слишком громоздким, и к нему прибегают лишь тогда, когда нужно получить точный результат.

Поэтому мы его в общем виде рассматривать не будем, а остановимся в этом параграфе на наиболее простом, но важном случае. В следующем параграфе мы рассмотрим общий приближенный метод исследования схем при ЧМ и ФМ.

Пусть проводимость цепи определяется выражением

$$\boxed{Y(\omega) = Y_0 e^{i[(\omega - \omega_0)\tau + \alpha_0]}} \quad (7.30)$$

где Y_0 , ω_0 , τ и α_0 — любые действительные числа. Воздействие АМ напряжения на цепь с такой проводимостью рассмотрено в § 6.13.

В соответствии с ф-лам (7.22) и (7.23) ЧМ или ФМ колебание

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (7.31)$$

может быть представлено суммой двух АМ колебаний. Ток от этих колебаний при заданной проводимости в соответствии с изложенным в § 6.13 будет равен

$$i = Y_0 U_m \cos \varphi(t + \tau) \cos(\omega_0 t + \alpha_0) - \\ - Y_0 U_m \sin \varphi(t + \tau) \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

откуда

$$\boxed{i = Y_0 U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t + \tau) + \alpha_0]} \quad (7.32)$$

Таким образом, для случая проводимости (7.30) искажения модуляции не будет: кривая модуляции, определяемая $\varphi(t)$, лишь сдвинется по времени на величину τ и колебание тока будет иметь добавочный постоянный сдвиг фаз α_0 по отношению к напряжению. Этот результат совпадает с результатом, полученным в § 6.13 для АМ.

Случай, когда проводимость цепи для несущей и боковых частот имеет одно и то же значение, т. е. когда

$$\mathbf{Y} = Y_0 e^{i\alpha_0}, \quad (7.33)$$

где Y_0 и α_0 — постоянные величины, является частным случаем проводимости (7.30) при $\tau = 0$.

В этом случае амплитуда тока будет в Y_0 раз больше амплитуды напряжения и ток будет сдвинут по фазе на постоянную величину α_0 по отношению к напряжению.

Все сказанное в этом параграфе справедливо и для смешанно-модулированных колебаний, для которых U_m — величина переменная.

Действительно, ф-лы (7.23) и (7.32), как нетрудно убедиться, верны и для переменного U_m .

Совершенно аналогично надо поступать, если нужно по току найти напряжение, или по напряжению на входе схемы найти напряжение на ее выходе, только в этих случаях вместо проводимости нужно брать соответственно сопротивление или коэффициент передачи.

Чтобы избежать искажений модулированных колебаний, обычно стремятся создать цепи, которые удовлетворяли бы приведенным здесь условиям, т. е. такие цепи, которые в полосе частот колебаний имеют сдвиг фаз, линейно зависящий от частоты, и модули проводимости, сопротивления или коэффициента передачи, не зависящие от частоты.

Пример 7.5. Фазово-модулированное напряжение

$$u = 10 \cos \left[10^8 t + 1,5 \cos \left(10\,000 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ В}$$

действует на индуктивность $L = 1$ мкГн. Найти ток в этой индуктивности.

Решение. Частотное отклонение для данного случая будет равно

$$\Delta\omega = m\Omega = 1,5 \cdot 10\,000 = 15\,000 \text{ 1/с.}$$

Поэтому можно считать, что полоса, занимаемая частотами этого колебания, равна

$$2(\Delta\omega + \Omega) = 50\,000 \text{ 1/с,}$$

откуда крайние частоты, колебаниями которых мы еще не пренебрегаем, будут иметь значение

$$10^8 \pm \frac{1}{2} \cdot 50\,000 = (100\,000\,000 \pm 25\,000) \text{ 1/с.}$$

Ясно, что проводимость индуктивности для всех частот в этих сравнительно узких пределах может считаться постоянной и равной

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{10^8 \cdot 10^{-6}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = 10^{-2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Поэтому для данного случая можно положить в ф-ле (7.30)

$$Y_0 = \frac{1}{\omega_0 L} = 10^{-2}, \quad \tau = 0, \quad \alpha_0 = -\frac{\pi}{2},$$

откуда в соответствии с ф-лой (7.32) получим

$$i = 0,1 \cos \left[10^8 t + 1,5 \cos \left(10\,000t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right] \text{ А.}$$

Пример 7.6. Через цепь, состоящую из последовательно включенных. активного сопротивления $r = 100$ Ом и конденсатора $C = 200$ нФ протекает ток

$$i = 9,1 \cos(5 \cdot 10^7 t + 3 \cos 5 \cdot 10^3 t) \text{ А.}$$

Найти падение напряжения на этой цепи.

Решение. В этом случае требуется составляющие тока умножить на сопротивление цепи.

Как нетрудно убедиться, сопротивление для всех частот колебания тока может быть в этом примере принято равным:

$$Z(\omega) = r - i \frac{1}{\omega_0 C} = 100 - i \frac{1}{200 \cdot 10^{-125} \cdot 10^7} = 100 - 100i = 100\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

откуда, действуя аналогично примеру 7.5, получим искомое падение напряжения

$$u = 10\sqrt{2} \cos \left(5 \cdot 10^7 t + 3 \cos 5 \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ В.}$$

Пример 7.7. Частотно-модулированная эдс

$$u = 10 \cos \left[10^8 t + 1,5 \cos \left(10\,000t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ В}$$

действует в последовательном колебательном контуре. Контур имеет угловую резонансную частоту $\omega_p = 10^8$ 1/с и добротность $Q = 500$. Найти напряжение на катушке индуктивности.

Решение. Для нахождения напряжения на индуктивности надо составляющие эдс множить на коэффициент передачи контура, который для частот, близких к резонансной, может быть в соответствии с изложенным в § 4.6 записан так:

$$K(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{i(-\beta + \frac{\pi}{2})},$$

где $\beta = \arctg \xi$ и $\xi = 2Q \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \right)$.

По условию несущая частота равна резонансной. Как было показано в примере 7.5, крайняя учитываемая нами боковая частота отстоит от резонансной на 25 000 1/с. Отсюда для крайних учитываемых боковых частот

$$\xi = \pm 2 \cdot 500 \cdot \frac{25\,000}{10^8} = 0,25; \quad \xi^2 = 0,0625.$$

Пренебрегая ξ^2 по сравнению с 1 в знаменателе и полагая приближенно $\beta = \arctg \xi \approx \xi$, мы получим

$$K(\omega) = 500 e^{i[-10^{-5}(\omega - 10^8) + \frac{\pi}{2}]}$$

Таким образом, выражение для $\mathbf{K}(\omega)$ будет подобно ф-ле (7.30). В данном случае $\tau = -10^{-5}$ и аргумент коэффициента усиления на несущей частоте $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, напряжение на индуктивности будет равно

$$\begin{aligned} u_L &= 500 \cdot 10 \cdot \cos \left\{ 10^8 t + 1,5 \cos \left[10\,000(t - 10^{-5}) + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= 5000 \cos \left[10^8 t + 1,5 \cos \left(10\,000t - 0,1 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{3} \pi \right] \text{ В.} \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что частота напряжения U_L будет несколько отличаться от частоты эдс, запаздывая в своем изменении от последней на 10^{-5} с, что составляет сдвиг фаз в колебании частоты в 0,1 рад или в $5,7^\circ$.

§ 7.10. Приближенный метод исследования схем при частотной и фазовой модуляции

В предыдущем параграфе мы рассмотрели ряд частных случаев цепей, не искажающих модуляции, исследование которых при ЧМ и ФМ не представляет труда. Однако эти случаи далеко не исчерпывают встречающихся на практике. Поэтому мы рассмотрим еще один приближенный метод исследования, пригодный как при исследовании ЧМ и ФМ, так и смешанно-модулированных колебаний.

Пусть дано смешанно-модулированное колебание

$$u = U_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t)], \quad (7.34)$$

которое действует на конденсатор с емкостью C . Ток через конденсатор будет равен

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} = C \frac{dU_m(t)}{dt} \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t)] - \\ &- CU_m(t) \left[\omega_0 + \frac{d\varphi_u(t)}{dt} \right] \cdot \sin[\omega_0 t + \varphi_u(t)]. \end{aligned}$$

Поскольку выражение

$$\omega_0 + \frac{d\varphi_u(t)}{dt} = \omega_u$$

представляет частоту напряжения, мы можем, действуя совершенно аналогично § 6.3, записать выражение тока в комплексной форме так:

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{Y}_C \mathbf{U}.} \quad (7.35)$$

Здесь $\mathbf{U} = \frac{U_m(t)}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_u(t)}$ — напряжение (7.34) в комплексной форме

$$\mathbf{Y}_C = \gamma_u C + i\omega_u C = \sqrt{\gamma_u^2 + \omega_u^2} C e^{i\beta}, \quad (7.35a)$$

$$\gamma_u = \frac{1}{U_m(t)} \cdot \frac{dU_m(t)}{dt}, \quad (7.36)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_u}{\gamma_u} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_u}{\omega_u}. \quad (7.37)$$

Эти выражения отличаются от (6.8) и (6.7) § 6.3 лишь тем, что вместо ω_0 здесь стоит ω_u , которое может быть переменным.

На основании выражения (7.35) мгновенное значение тока может быть записано и так:

$$i = \sqrt{\gamma_u^2 + \omega_u^2} C U_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_u(t) + \beta].$$

Следует отметить, что угловая частота тока будет равна

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi_u(t)}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \omega_u + \frac{d\beta}{dt},$$

т. е. будет отличаться от угловой частоты напряжения на величину $\frac{d\beta}{dt}$.

В случае, если $\gamma_u \ll \omega_u$, можно считать

$$\mathbf{Y}_C = i\omega_u C. \quad (7.38)$$

В этом случае величина β будет мало отличаться от $\pi/2$, величина $\frac{d\beta}{dt}$ будет мала и можно считать $\omega_i = \omega_u$.

Совершенно аналогично, если через индуктивность L течет смешанно-модулированный ток

$$i = I_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)], \quad (7.39)$$

то падение напряжения на индуктивности будет равно

$$u = L \frac{di}{dt} = L \frac{dI_m(t)}{dt} \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)] - \omega_i L I_m(t) \sin[\omega_0 t + \varphi_i(t)],$$

где

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi_i(t)}{dt}.$$

Это напряжение в комплексной форме представится в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_L \mathbf{I}, \quad (7.40)$$

где

$$\mathbf{I} = \frac{I_m(t)}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_i(t)},$$

$$\mathbf{Z}_L = \gamma_i L + i\omega_i L = \sqrt{\gamma_i^2 + \omega_i^2} L e^{i\beta}, \quad (7.41)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{I_m(t)} \cdot \frac{dI_m(t)}{dt}, \quad (7.42)$$

$$\beta = \arctg \frac{\omega_i}{\gamma_i} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\gamma_i}{\omega_i}.$$

Мгновенное значение падения напряжения на основании (7.40) может быть записано и так:

$$u = \sqrt{\gamma_i^2 + \omega_i^2} L I_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t) + \beta].$$

В случае, если $\gamma_i \ll \omega_i$, то можно величиной γ_i пренебречь. В этом случае

$$\mathbf{Z}_L = i\omega_i L \quad (7.43)$$

и частоты тока и напряжения будут практически одинаковы.

При прохождении тока (7.39) через активное сопротивление r падение напряжения на нем будет равно

$$u = ri = rI_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)],$$

или в комплексной форме

$$\mathbf{U} = r\mathbf{I}. \quad (7.44)$$

Таким образом, если $\gamma \ll \omega$, то при частотной и смешанной модуляции можно пользоваться соотношениями (7.38), (7.43) и (7.44), которыми мы пользовались для немодулированных колебаний. При этом частоты тока будут примерно равны частотам напряжений. Из этого следует, что при условии $\gamma \ll \omega$ все соотношения, выведенные для немодулированных колебаний, будут пригодны и для модулированных, только в этом случае частота колебаний ω может быть переменной.

Воспользуемся сказанным для нахождения тока в последовательном колебательном контуре при воздействии на него ЧМ эдс.

Пусть ЧМ или ФМ эдс

$$e = E_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0] \quad (7.45)$$

воздействует на резонансный контур.

В комплексной форме ток в этом контуре для случая немодулированных колебаний согласно (4.7) будет равен

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}e^{-i\beta}}{r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}, \quad (7.46)$$

где

$$\beta = \text{arctg } Q\nu = \text{arctg } Q \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right).$$

Мгновенное значение тока будет равно

$$i = \frac{E_m}{r \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}} \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0 - \beta]. \quad (7.47)$$

Согласно сказанному выше, можно считать, что этот результат получится приближенно и при эдс, данной выражением (7.45), если в ф-лы (7.46) и (7.47) подставить частоту

$$\omega = \omega_e = \omega_0 + m_1 \Omega_1 \cos(\Omega_1 t + \Phi_1).$$

При этом мы получим, как это следует из ф-л (7.47) и (7.46), что амплитуда тока и его сдвиг фаз β по отношению к эдс будут переменными величинами. Следовательно, в данном случае γ_u и γ_i не будут равны нулю и выражение (7.47) будет давать лишь приближенное значение тока.

Частота тока также приближенно будет равна

$$\omega_i = \omega_e - \frac{d\beta}{dt}. \quad (7.48)$$

Приведенный здесь метод нахождения тока становится особенно наглядным, если рассмотрение вести графически. Такое рассмотрение мы проведем на числовом примере и на нем же покажем, как можно оценить ошибку, получающуюся из-за пренебрежения величинами γ_i и γ_u .

Пример 7.8. Пусть эдс $e = 10 \cos(1,015 \cdot 10^7 t + 10 \sin 10^4 t)$ действует на контур с параметрами: $\omega_p = 10^7$, $Q = 100$, $r = 10$ Ом, $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ. Требуется найти ток в контуре.

Угловая частота заданной эдс равна

$$\omega_e = 1,015 \cdot 10^7 + 10^5 \cos 10^4 t.$$

Она будет изменяться в пределах от $1,005 \cdot 10^7$ до $1,025 \cdot 10^7$ и, следовательно, будет всегда близка к угловой резонансной частоте контура ω_p .

Резонансная кривая для тока может быть поэтому построена по формуле

$$I_m = \frac{E_m}{r \sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{2(\omega_e - \omega_p)}{\omega_p} \right]^2}}.$$

Она дана на рис. 7.13а.

На рис. 7.13б дан график изменения ω_e во времени. Этот график повернут для удобства построения на 90° . Снося для различных значений времени величину ω_e на график 7.13а, мы по нему можем найти амплитуду тока I_m

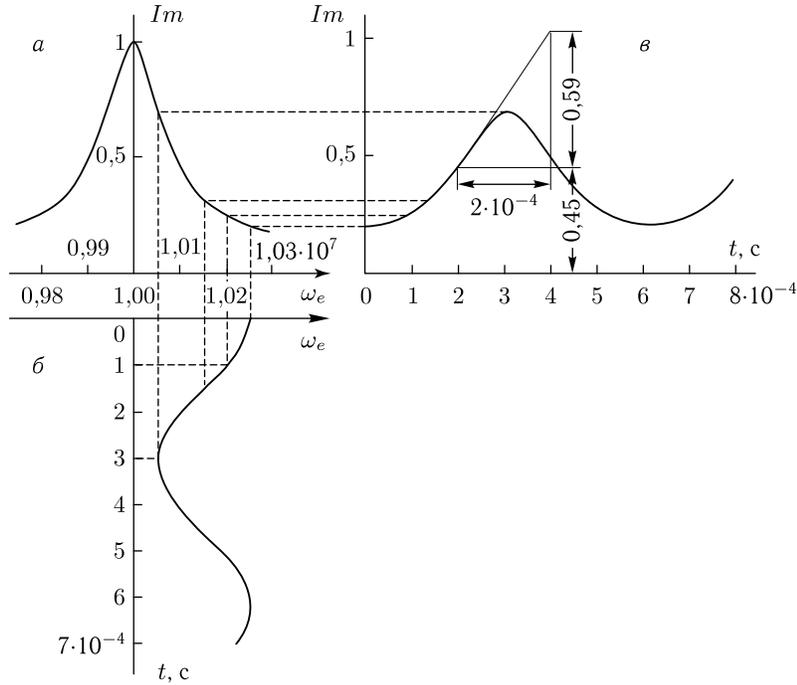


Рис. 7.13. Приближенное определение амплитуды тока при воздействии ЧМ эдс на последовательный колебательный контур: а) резонансная кривая контура, б) зависимость угловой частоты ω_e от времени, в) зависимость амплитуды тока в контуре I_m от времени

и построить ее как функцию времени. На рис. 7.13в пунктиром показано для примера построение графика зависимости I_m от t для моментов времени

$$t = 0; 10^{-4}; 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ и } 3 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Надо помнить, что последний график будет давать не мгновенные значения тока, а амплитуды, т. е. огибающую колебаний тока.

На рис. 7.14а дана зависимость угла сдвига фаз между током и напряжением от угловой частоты ω_e , определенная по формуле

$$\beta = Q \frac{2(\omega_e - \omega_p)}{\omega_p}.$$

На рис. 7.14б дана зависимость ω_e от t (график повернут на 90°) и на рис. 7.14в — построенная графически на основании рис. 7.14а и 7.14б зависимость β от t .

В соответствии с ф-лой (7.48) угловая частота тока будет отличаться от угловой частоты напряжения на величину $-\frac{d\beta}{dt}$.

Как видно из рис. 7.14в, максимальное отклонение угловой частоты тока от угловой частоты напряжения будет при

$$t = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ и } t = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

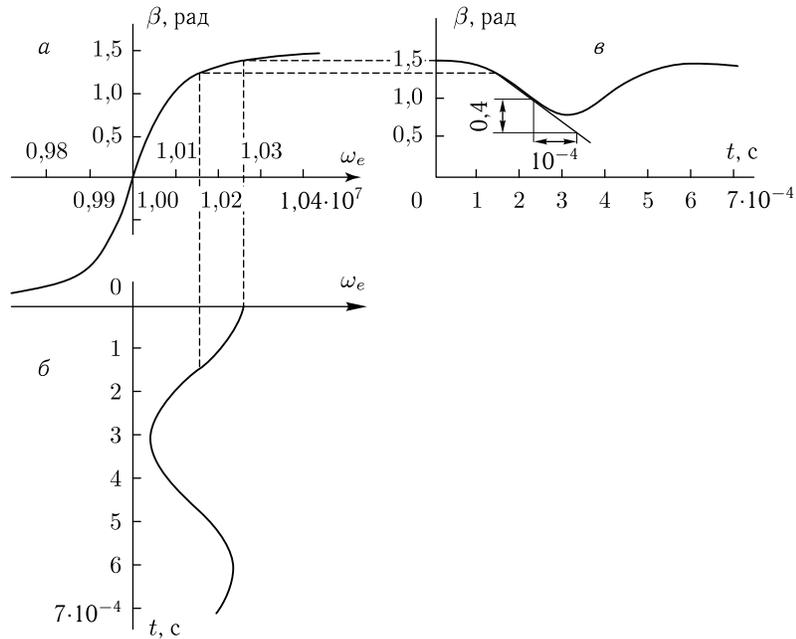


Рис. 7.14. Приближенное определение сдвига фаз тока при воздействии ЧМ эдс на последовательный колебательный контур: а) фазовая характеристика контура, б) зависимость угловой частоты эдс ω_e от времени, в) зависимость сдвига фаз β между током и эдс от времени

Это отклонение частоты будет равно (рис. 7.14б)

$$\pm \frac{0,4}{10^{-4}} = \pm 4000 \text{ рад/с,}$$

т. е. будет составлять примерно 0,04 % от несущей частоты и 4 % от частотного отклонения. Полученный нами результат является приближенным, поскольку ток в контуре будет модулирован по амплитуде, а мы не учитывали влияние амплитудной модуляции. Найдем порядок величины погрешности, вызванной этим обстоятельством.

Из рис. 7.13в видно, что максимальное значение γ_i будет около момента $t = 2 \cdot 10^{-4}$. Из этого рисунка также видно, что в этот момент

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{0,59}{2 \cdot 10^{-4}} = 2950 \text{ А/с} \quad \text{и} \quad I_m = 0,45 \text{ А,}$$

откуда

$$\gamma_i = \frac{\frac{dI_m}{dt}}{I_m} = \frac{2950}{0,45} = 6550 \text{ 1/с.}$$

В этот момент времени в контуре появится дополнительное последовательное сопротивление

$$\gamma_i L = 6550 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,655 \text{ Ом.}$$

Поскольку угловая частота тока мало отличается от угловой частоты эдс, а последняя от ω_p , можно считать, что амплитуда тока в конденсаторе будет в соответствии с (7.38) равна

$$I_m \approx \omega_p C U_{Cm}.$$

Из этой формулы мы имеем

$$\gamma_u = \frac{dU_{Cm}}{U_{Cm} dt} \approx \gamma_i.$$

Сопrotивление конденсатора будет в соответствии с (7.35а) равно

$$Z_C = \frac{1}{\gamma_u C + i\omega C} = \frac{\gamma_u C - i\omega C}{\gamma_u^2 C^2 + \omega^2 C^2}.$$

Поскольку в данном случае

$$\gamma_u \approx \gamma_i; \quad \gamma_i^2 \ll \omega^2; \quad \omega \approx \omega_p \quad \text{и} \quad \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C},$$

то

$$Z_C = \frac{\gamma_i}{\omega_p^2 C} - i \frac{1}{\omega_p C} = \gamma_i L - i \frac{1}{\omega_p C}.$$

Таким образом, в контуре появится в момент времени $2 \cdot 10^{-4}$ с дополнительное последовательное активное сопротивление, приблизительно равное

$$2\gamma_i L = 2 \cdot 6550 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 1,31 \text{ Ом}.$$

В момент времени $t = 4,2 \cdot 10^{-4}$ с, как легко видеть из рис. 7.13в, мы будем иметь

$$\gamma_i = -6550 \text{ 1/с}$$

и дополнительное активное сопротивление $-1,31$ Ом.

Таким образом, активное сопротивление контура будет колебаться в пределах от $10 + 1,31 = 11,31$ Ом, до $10 - 1,31 = 8,69$ Ом.

Для этих двух крайних значений сопротивления резонансные кривые даны на рис. 7.15, а фазовые характеристики на рис. 7.16.

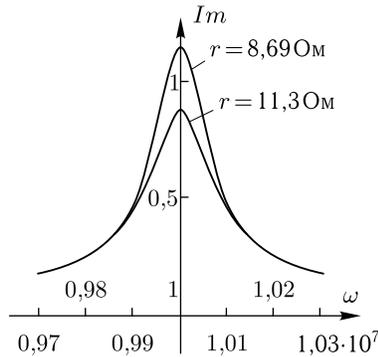


Рис. 7.15. Крайние значения резонансной кривой для примера 7.8

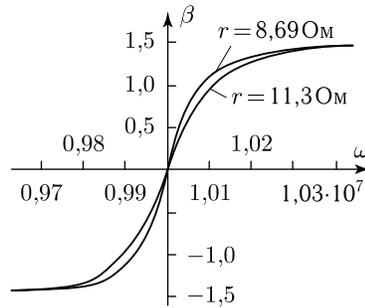


Рис. 7.16. Крайние значения фазовой характеристики для примера 7.8

Таким образом, для моментов времени, когда I_m росло и γ_i достигало максимума, мы должны были бы пользоваться кривыми для $r = 11,31$ Ом,

а для момента времени, когда I_m падало и γ_i достигало минимума — кривыми для $r = 8,69$ Ом. В остальные моменты времени надо было пользоваться промежуточными кривыми.

Как видно из этих кривых, при максимальном и минимальном значениях γ_i , которые соответствуют примерно угловой частоте $1,01 \cdot 10^{-7}$, ошибка в определении I_m и β достигает 5 %.

Для частот более близких к ω_p кривые расходятся больше, но зато при этих значениях абсолютное значение γ_i меньше.

В тех случаях, когда такие ошибки недопустимы, можно результат уточнить, определив из полученной нами приближенной кривой для I_m величину γ_i , как функцию времени, и на основании этого вносить каждый раз при определении I_m и β поправки в резонансную кривую и фазовую характеристику.

Из рассмотренного примера видно, что при воздействии на резонансный контур ЧМ эдс амплитуда тока в контуре, а следовательно, и амплитуды напряжения на индуктивности и емкости будут меняться. Этим пользуются при приеме ЧМ колебаний для превращения их в колебания с переменной амплитудой, которые затем детектируются обычным способом.

Литература к главе 7

Гоноровский И. С. Частотная модуляция и ее применение. — Связьиздат, 1948.